ÉCOLE SUPÉRIEURE DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET COMMERCIALES 1982

Etablissement Privé d'Enseignement Supérieur Reconnu par l'Etat

MATHEMATIQUES 2ème épreuve (4 h)

Les deux parties du problème sont largement indépendantes. Seules les questions II.4 et II.5 utilisent des résultats obtenus dans la partie I.

- I -

n désignant un entier naturel, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à n et du polynôme nul. Un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ est noté indifféremment P ou $P(X)$.

1 - (a) Montrer que, pour tout entier k appartenant à $\{0, 1, \ldots, n\}$, il existe un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, unique, $L_{k,n} = (-1)^{n-k} \frac{C_n^k}{n!} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} (X-i)$, satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\} \quad L_{k,n}(i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k. \\ 1 \text{ si } i = k. \end{cases}$$

(b) Montrer que $(L_{0,n} ; L_{1,n} ; \ldots ; L_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base ?

En déduire la formule $\sum_{k=0}^{n} L_{k,n} = 1$ et la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X-1)\,(X-2)\ldots(X-n)}$.

(c) Soit Π la matrice de passage de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base $(L_{0,n} ; L_{1,n} ; \ldots ; L_{n,n})$. On ne demande pas d'écrire Π mais de donner : 1) les éléments de la première ligne,
2) la somme des éléments de toute autre ligne,
3) la somme des éléments des différentes colonnes.

Ecrire la matrice Π^{-1} inverse de Π.

2 - (a) Montrer que $(L_{0,0} ; L_{1,1} ; L_{2,2} ; \ldots ; L_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Soit $\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$. L'image d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ par Δ, soit $\Delta(P)$, sera notée plus simplement ΔP, dans la suite.

Montrer que l'application Δ est linéaire. Ecrire sa matrice dans la base $(L_{0,0} ; L_{1,1} ; \ldots ; L_{n,n})$. En déduire le noyau et l'image de Δ.

(c) On note Δ^0 l'identité sur $\mathbb{R}_n[X]$ et pour $i \geq 1$ $\Delta^i = \Delta \circ \Delta^{i-1}$.

P appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que sa décomposition sur la base $(L_{0,0} ; L_{1,1} ; \ldots ; L_{n,n})$ s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^k P)(0)\, L_{k,k}$.

.../...

3 - (a) f désignant une fonction réelle de variable réelle, on note désormais Δf la fonction définie pour tout x tel que $f(x+1)$ et $f(x)$ existent, par $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$, et par récurrence, pour $i > 1$ $\Delta^i f = \Delta(\Delta^{i-1} f)$. On convient enfin que $\Delta^0 f = f$. Soit alors f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,n]$. Montrer qu'il existe un polynôme unique $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \quad f(k) = P_f(k) .$$

(b) Montrer que : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-i\}$ $(\Delta^i f)(k) = (\Delta^i P_f)(k)$.

En déduire que : $f(n) = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^k f)(0)\, L_{k,k}(n)$ (1)

(c) a désignant un réel tel que $a > n$, on pose $f(x) = \frac{1}{a - x}$. Montrer par récurrence que : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $(\Delta^k f)(x) = \frac{k!}{(a-x)(a-1-x)\ldots(a-k-x)}$.

Ecrire la relation (1) pour f et en déduire que, si N est un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel tel que $x \geqslant N$:

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{N(N-1)\ldots(N-k)}{x(x-1)\ldots(x-k)} = \frac{N(N-1)}{x(x-N+1)}$$

- II -

Préliminaire : 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$; montrer que la série $\sum P(X=n)u^n$ converge pour tout $u \in [0,1]$. La fonction : $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)u^n$ est appelée fonction génératrice de la variable aléatoire X.

2. Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction génératrice de la variable $X+Y$ est égale au produit des fonctions génératrices de X et de Y.

Dans cette partie, N désigne un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue des tirages successifs "au hasard et avec remise" d'une boule de cette urne et l'on s'intéresse au numéro marqué sur chaque boule tirée.

Pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant N-1$, X_n désigne le nombre aléatoire de tirages nécessaires à l'obtention de $(n+1)$ numéros distincts, et l'on note :

$$Y_1 = X_1 - 1 , \; Y_2 = X_2 - X_1 , \; \ldots, \; Y_n = X_n - X_{n-1} .$$

On remarquera que : $P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = \ldots = P(Y_n = 0) = 0$.

1 - (a) Quelle est la probabilité que les k ($k \geqslant 2$) premières boules tirées portent le même numéro ?

(b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_1.

(c) Donner l'espérance mathématique, la variance et la fonction génératrice de chacune des variables aléatoires Y_1 et X_1.

.../...

2 - (a) $(p, n, k) \in (\mathbb{N}^*)^3$ $p \geqslant n \geqslant 2$. Calculer la probabilité conditionnelle, sachant que $X_{n-1} = p$, de l'évènement $Y_n = k$. Dépend-elle de p ?

(b) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_n , son espérance mathématique, sa variance et sa fonction génératrice.

3 - Déterminer l'espérance mathématique, la variance et la fonction génératrice f_n de la variable aléatoire X_n .

4 - (a) Montrer que, pour $x \geqslant N$: $f_n\left(\frac{N}{x}\right) = \frac{N(N-1)\ldots(N-n)}{x(x-1)\ldots(x-n)}$.

(b) Utiliser la décomposition en éléments simples obtenue au I-1-b pour montrer que : $f_n(u) = C_{N-1}^n \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{C_n^k u}{1 - \frac{k}{N} u} \right)$.

(c) En déduire, pour $i \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = i)$.

Quelle remarque peut-on faire, à propos du résultat obtenu ?

5 - (a) Trouver, en utilisant I-3-c, une expression simple de $\sum_{n=1}^{N-1} f_n(u)$.

(b) Quelle est la probabilité d'obtenir au $p^{\text{ème}}$ tirage ($p \geqslant 2$) un numéro non encore sorti ?

(c) En déduire l'espérance mathématique du nombre aléatoire de numéros distincts sortis en n tirages ($n \geqslant 1$) et la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$. Etait-ce prévisible ?

6 - Application : On suppose dans cette question que N et n variables sont liés par $N = \alpha (n+1)$ où α désigne un rationnel fixé, supérieur ou égal à 1.

(a) Montrer que, si $\alpha > 1$, $\frac{E(X_n)}{n}$ et $\frac{V(X_n)}{n}$ admettent, quand n tend vers $+\infty$, des limites $\ell(\alpha)$ et $v(\alpha)$ que l'on précisera.

Donner les limites L de $\ell(\alpha)$ et V de $v(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$ ainsi que des équivalents simples de $\ell(\alpha)-L$ et $v(\alpha)-V$.

(b) Montrer que, si $\alpha = 1$, $\frac{E(X_n)}{n}$ et $\frac{V(X_n)}{n}$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Donner des équivalents de $E(X_n)$ et $V(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ (on admettra que, si n tend vers $+\infty$, $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$ est équivalent à $\operatorname{Log} n$ et que $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$) .

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail